Clase 22-Abril-2025

= Estado cuasi clásicos, estados coherentes =

Los estados estacionarios $|\varphi_n\rangle$ del oscilador armónico y sus propiedades fueron vistas anteriormente. Por ejemplo:

$$\langle \varphi_n | \hat{X} | \varphi_n \rangle = \langle \hat{X} \rangle = 0$$
$$\langle \varphi_n | \hat{P} | \varphi_n \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$$

Clásicamente, sabemos que, la posición y momento son funciones tiempo dependientes y oscilantes y que permanecen en cero sólo si también la energía de movimiento es también cero.

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \quad \text{with} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \left(V(x) = \frac{1}{2} K x^2\right)$$

Además, la mecánica cuántica debe entregar los mismos resultados que la mecánica clásica en el límite en el que el oscilador armónico tiene una energía mucho mayor que un cuanto $\hbar\omega$ (largos números cuánticos).

¿Podemos construir estados cuánticos que nos lleven a predicciones físicas las cuales sean casi idénticas a las predicciones clásicas?

→ Sí podemos. Estos estados son superposiciones lineales coherentes de todos los estados $|\varphi_n\rangle$. Los llamamos "estados cuasi-clasicos" o "estados coherentes" del oscilador armónico.

Muchos sistemas físicos pueden ser ligados al oscilador armónico, al menos a una primera aproximación.

Para todos estos sistemas, es importante entender como moverse gradualmente del caso donde los resultados clásicos son suficientes al caso donde los efectos cuánticos son preponderantes.

⊙ Campos electromagneticos son un buen ejemplo → fotones

"Estados coherentes" de la radiación electromagnética fueron presentados por Glauber y son usados en el dominio de la óptica cuántica.

Mecánica Cuántica : x , P y H (energía) del oscilador armónico están descritos por operadores que no conmutan. Son cantidades físicas incompatibles.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$$

No es posible, por tanto, construir un estado en el cuál, estas cantidades, estén perfectamente bien definidos.

- Buscamos un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ tal que sus valores promedios $\langle x\rangle_t$, $\langle P\rangle_t$ y $\langle H\rangle_t$ sigan lo más fielmente posible las ecuaciones clásicas del oscilador armónico.

- Desviaciones Cuadráticas Medias (RMS) ΔX ΔP ΔH existen.

- En el límite microscópico (número de cuantos es muy grande, o $|\alpha| \gg 1$ en un edo. coherente) estas incertidumbres son despreciables, de modo que el comportamiento quasi-clásico surge.

- Los edo. coherentes minimizan la incertidumbre pues $\Delta X \Delta P = \hbar/2$

= Repaso =

Las ecuaciones del oscilador armonico en una dimensión de masa m y frecuencia ω,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad \mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

siendo $p = m\dot{x}$

Ecuaciones de Hamilton: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{2} P(t)$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x(t)$

Combinando estas dos ecuaciones da la ecuación habitual,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Agrupando

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{m} p(t) \\ \frac{d}{dt} P(t) = -m\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Para facilitar los cálculos vamos a introducir las cantidades adimensionales siguientes,

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \beta x(t) \\ \hat{p}(t) = \frac{1}{\hbar\beta} p(t) \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

De esta forma, las ecuaciones pueden escribirse como,

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \beta \frac{dx(t)}{dt} = \beta \frac{1}{m} p(t)$$

$$= \frac{\beta}{m} \hbar \beta \hat{p}(t) = \frac{\hbar \beta^2}{m} \hat{p}(t) \qquad \text{pero} \quad \beta^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$= \frac{\hbar}{m} \frac{m\omega}{\hbar} \hat{p}(t) = \omega \hat{p}(t)$$

$$\boxed{\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \omega \hat{p}(t)}$$

análogamente,

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar\beta} \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{m\omega^2 x(t)}{\hbar\beta} = -\frac{m\omega^2}{\hbar\beta^2} \hat{x}(t)$$

$$= -\frac{m\omega^2}{\hbar} \frac{\hbar}{m\omega} \hat{x}(t) = -\omega \hat{x}(t)$$

$$\boxed{\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\omega \hat{x}(t)}$$

No confundir con operadores

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{x}(t) = \omega\,\hat{p}(t) & \dots (4a) \\ \dfrac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\omega\,\hat{x}(t) & \dots (4b) \end{cases}$$

El estado del oscilador armónico al tiempo t está dado por su posición y momento, $x(t)$ y $p(t)$.

Combinando estos dos números reales en un número adimensional complejo $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(t) + i\,\hat{p}(t)\right)$$

derivamos

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\hat{x}}(t) + i\,\dot{\hat{p}}(t)\right) \rightsquigarrow \text{Usando (4a) y (4b)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega\hat{p}(t) - i\omega\hat{x}(t)\right) = -i\omega\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(t) + i\hat{p}(t)\right)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t)$$

cuya solución es,

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad \dots (7)$$

donde $\alpha_0 = \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(0) + i\hat{p}(0)\right) \rightsquigarrow$ Condiciones iniciales del problema

$\hookrightarrow \in \mathbb{C}$

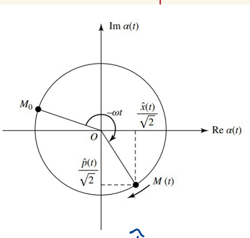

Figure 1: The point $M(t)$, which corresponds to the complex number $\alpha(t)$, characterizes the state of the harmonic oscillator at each instant. M moves in a circle with an angular velocity $-\omega$. The abscissa and ordinate of M give the position and momentum of the oscillator.

¿Por qué es útil este α?

1. Tenemos un sólo número: En lugar de dos reales (x, p).
2. Ecuaciones compactas: La dinámica se reduce a $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha$

Si consideras el plano complejo (Fig (1)).
El módulo $|\alpha_0|$ es la distancia OM_0 en $t=0$; $M = M_0 = \alpha_0$ y gira a a una velocidad angular $-\omega$.

Obtenemos también una representación geometrica muy sencilla de la evolución del sistema.

$|\alpha_0| \sim$ Amplitud de la oscilación $\quad$ $\text{Img}\{\alpha\} = \frac{\hat{p}(t)}{\sqrt{2}}$

$\text{Re}\{\alpha\} = \frac{\hat{x}(t)}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\arg\{\alpha_0\} \sim$ phase

Teniendo esta solución, podemos obtener $\hat{x}(t)$ y $\hat{p}(t)$,

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(t) + i\hat{p}(t)\right) \qquad \alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(t) - i\hat{p}(t)\right)$$

Sumando estas dos,

$$\alpha(t) + \alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\hat{x}(t) + i\hat{p}(t) + \hat{x}(t) - i\hat{p}(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\hat{x}(t) = \sqrt{2}\,\hat{x}(t)$$

$$\sqrt{2}\,\hat{x}(t) = \alpha(t) + \alpha^*(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}\right\} \quad \ldots (9a)$$

análogo para $\hat{p}(t)$

$$p(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}\right\} \quad \ldots (9b)$$

Para un oscilador armónico, la energía $\mathcal{H}$ es constante en el tiempo e igual a,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[p(0)\right]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left[x(0)\right]^2 \quad \text{y usando}$$

$$\hat{x}(0) = \beta\, x(0) \quad ; \quad \hat{p}(0) = \frac{1}{\hbar\beta}\, p(0) \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

tenemos que,

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left\{ \underbrace{[\hat{x}(0)]^2 + [\hat{p}(0)]^2}_{\text{Modulo cuadrado de } \alpha} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega |\alpha_0|^2$$

Oscilador clásico (macroscopico), la energía $\mathcal{H}$ es mucho mayor que el cuanto de energía $\hbar\omega$.

$$|\alpha_0| \gg 1$$

= Condiciones para definir estados coherentes (casi-clasicos) =

Buscamos edos cuanticos para los cuales a cada instante el valor esperado de

$\langle X \rangle, \langle P \rangle$ y $\langle H \rangle$ sean practicamente iguales a x, p y $\mathcal{H}$ de un movimiento clásico.

para estos cálculos usamos,

$$\hat{X} = \beta X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+) \qquad \hat{P} = \frac{1}{\hbar\beta} P = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^+) \quad \dots (13)$$

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$ ⇝ ya son operadores.

para un estado $|\psi(t)\rangle$ arbitrario, la evolución del elemento de matriz

$$\langle a \rangle(t) = \langle \psi(t) | a | \psi(t) \rangle$$

es

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$ → Teo. Ehrenfest

por tanto

$$\frac{d}{dt}\langle a \rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle [a, H] \rangle(t)$$

$$[\hat{a}, H] = \hbar\omega [a, a^+a] = \hbar\omega a$$

Nota: Calculando $[a, \hat{H}]$:
Teniendo $\hat{H} = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$,
$[a, \hat{H}] = \hbar\omega [a, a^+a]$ y
usando que $[a, a^+] = 1$ tenemos que
$[a, a^+a] = aa^+a - a^+aa = \cancel{[a, a^+]}^{1} a = a \Rightarrow [a, \hat{H}] = \hbar\omega a$

por tando

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle \hbar\omega a\rangle = \frac{1}{i\hbar}\hbar\omega\langle a\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle(t) = -i\omega\langle a\rangle \quad \dots (17)$$

cuya solución $\quad \langle a\rangle(t) = \langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} \quad \dots (18)$

analogo para $\langle a^{\dagger}\rangle = \langle \psi(t)|a^{\dagger}|\psi(t)\rangle$

$$\langle a^{\dagger}\rangle(t) = \langle a^{\dagger}\rangle(0)\, e^{i\omega t}$$
$$= \langle a\rangle^{*}(0)\, e^{i\omega t} \quad \dots (19)$$

(18) y (19) son analogos a $\alpha(t) = \alpha_0\, e^{-i\omega t}$. Usando (18) y (19) en (13) obtenemos,

↳ en el caso clásico

Esto se hace, tomando $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ que están en función de a y $a^{\dagger}$ por eso,
$\langle\hat{x}\rangle \propto \langle a\rangle + \langle a^{\dagger}\rangle$ ($\langle a^{\dagger}\rangle \to \langle a\rangle^{*}$)
$\langle\hat{p}\rangle \propto \langle a\rangle - \langle a^{\dagger}\rangle$ ($\langle a^{\dagger}\rangle \to \langle a\rangle^{*}$)

$$\begin{cases} \langle\hat{x}\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} + \langle a\rangle^{*}(0)\, e^{i\omega t}\right\} \\ \langle\hat{p}\rangle(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} - \langle a\rangle^{*}(0)\, e^{i\omega t}\right\} \end{cases} \quad \dots (20)$$

Comparando estos resultados,

$$\begin{cases} \langle\hat{X}\rangle(t) = \hat{x}(t) \\ \langle\hat{P}\rangle(t) = \hat{p}(t) \end{cases}$$

notar que esto se cumple si y sólo si la condición,

$$\langle a\rangle(0) = \alpha_0$$

así el vector de estado normalizado del oscilador debe de satisfacer la condición,

$$\langle\psi(0)|a|\psi(0)\rangle = \alpha_0 \quad \dots (23)$$

Ahora bien, falta la energía,

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \langle a^\dagger a \rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega}_{\text{Lo ignoramos pues } |\alpha_0| \gg 1} = \underbrace{\mathcal{H}}_{\text{clásico}}$$

Ignoramos este término pues estamos buscando edos. cuánticos que se acerquen a un edo. clásico eso quiere decir que tenemos muchos $\hbar\omega$ y por tanto $\hbar\omega\langle a^\dagger a \rangle \gg \frac{\hbar\omega}{2}$

Esto nos lleva a tener una condición inicial

$$\langle a^\dagger a \rangle(0) = |\alpha_0|^2$$

o bien,

$$\langle \psi(0) | a^\dagger a | \psi(0) \rangle = |\alpha_0|^2 \quad \ldots (26)$$

Por tanto, estamos buscando el vector de edo. normalizado $|\psi(0)\rangle$ que cumpla con

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle &= \alpha_0 \\ \langle \psi(0) | a^\dagger a | \psi(0) \rangle &= |\alpha_0|^2 \end{aligned}}$$

Busquemos este vector de estado normalizado que cumpla estas condiciones.

Definimos un operador (de fluctuaciones),

$$\hat{b}(\alpha_0) = \hat{a} - \alpha_0 \qquad \hat{b}^\dagger = a^\dagger - \alpha_0^*$$

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = (a^\dagger - \alpha_0^*)(a - \alpha_0) = a^\dagger a - \alpha_0 a^\dagger - \alpha_0^* a + |\alpha_0|^2$$

obtenemos su valor promedio teniendo $|\psi(0)\rangle$,

$$\langle \psi(0) | \hat{b}^\dagger \hat{b} | \psi(0) \rangle = \langle a^\dagger a \rangle - \alpha_0 \langle a^\dagger \rangle - \alpha_0^* \langle a \rangle + |\alpha_0|^2$$

Esto no se ha probado pero es sencillo hacerlo, análogo a $\langle a \rangle$.

pero debido a que $\langle a \rangle = \alpha_0$; $\langle a^+ \rangle = \alpha_0^*$ y $\langle a^+ a \rangle = |\alpha_0|^2$ tenemos,

$$\langle \psi(0) | \hat{b}^+ \hat{b} | \psi(0) \rangle = |\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^2 + |\alpha_0|^2 = 0$$

Recordar que $\hat{b} |\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle$ su dual $\langle \psi(0) | \hat{b}^+ = \langle \varphi |$ $\Downarrow$ $\langle \varphi | \varphi \rangle$

El ket $b(\alpha_0) |\psi(0)\rangle$ cuya norma es cero es el vector cero.

$$b(\alpha_0) | \psi(0) \rangle = 0$$
$$(\hat{a} - \alpha_0) | \psi(0) \rangle = 0$$
$$\hat{a} | \psi(0) \rangle = \alpha_0 | \psi(0) \rangle$$

ecuación de eigenvalores.

Si $|\psi(0)\rangle$ satisface esta relación, entonces se satisfacen automáticamente

$$\langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle = \alpha_0$$
$$\langle \psi(0) | a^+ a | \psi(0) \rangle = |\alpha_0|^2$$

Por tanto, $|\psi(0)\rangle$ es eigenvector de $\hat{a}$ con autovalor α_0.

Por tanto, el estado cuasi-clásico que estamos buscando, es precisamente el eigenvector de $\hat{a}$ con eigenvalor α_0.

Denotaremos estos eigenvectores como $|\alpha\rangle$. Usando esta notación, tenemos,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

= Propiedades de $|\alpha\rangle$ =

¿Cómo es $|\alpha\rangle$ en la base de estados estacionarios del Hamiltoniano $\{|\varphi_n\rangle\}$?

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha)\,|\varphi_n\rangle$$

aplicando el operador de aniquilación

$$a|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha)\, a\,|\varphi_n\rangle$$

$$= \sum_n C_n(\alpha)\sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle$$

usando $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ y poder comparar termino a termino se debe desplazar el índice,

$$m = n-1 \Rightarrow n = m+1$$

Comment:
$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$
$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$
$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

entonces,

$$a|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}(\alpha)\sqrt{m+1}\,|\varphi_m\rangle$$

ahora sí comparamos términos usando la ec. de eigenvalores,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \alpha\sum_{m=0} C_m(\alpha)\,|\varphi_m\rangle$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}(\alpha)\sqrt{m+1}\,|\varphi_m\rangle = \alpha\sum_{m=0}^{\infty} C_m(\alpha)\,|\varphi_m\rangle$$

si multiplicamos por un bra $\langle\varphi_{m'}|$ tenemos que

$$\delta_{m'm} \leftarrow \langle\varphi_{m'}|\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}(\alpha)\sqrt{m+1}\,|\varphi_m\rangle = \langle\varphi_{m'}|\alpha\sum_{m=0}^{\infty} C_m(\alpha)\,|\varphi_m\rangle \rightarrow \delta_{m'm}$$

$$C_{m+1}(\alpha)\sqrt{m+1} = \alpha\, C_m(\alpha)$$

$$C_{m+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{m+1}}\, C_m(\alpha) \longrightarrow \text{Nos permite la relación de recurrencia}$$

Todos los coeficientes $C_n(\alpha)$ en términos de $C_0(\alpha)$ son

$$C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0(\alpha)$$

Nos falta $C_0(\alpha)$ pero podemos usar,

$$\sum_n |C_n(\alpha)|^2 = 1 = \sum_n \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0(\alpha) \right|^2$$

$$= \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \underbrace{|C_0(\alpha)|^2}$$

$$= |C_0(\alpha)|^2 \overbrace{\boxed{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}}^{\text{no depende de } n} \Rightarrow e^x = \sum_n^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= |C_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$|C_0(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

$$C_0(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}$$

por tanto,

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle} \quad \ldots (41)$$

Hemos encontrado a los edo. coherentes

= Posibles valores de energía de un edo. $|\alpha\rangle$ =

Consideramos un oscilador en el edo. $|\alpha\rangle$. Sabemos que al medir la energía del sistema podemos obtener

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

La probabilidad de medir alguno de estos eigenvalores es, Comentario: Una dist. de Poisson,

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad \lambda = |\alpha|^2 \quad k = n$$

$$P_n(\alpha) = |C_n(\alpha)|^2 = \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0(\alpha) \right|^2$$

$$= \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |C_0(\alpha)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

↳ Distribución de Poisson

$$\langle H \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle$$

$$= \sum_n P_n(\alpha) \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega$$

o bien usando que,

$$\langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$$

tenemos,

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha = |\alpha|^2$$

$$\langle H \rangle_\alpha = \hbar\omega \langle \alpha | \left\{ a^\dagger a + \frac{1}{2} \right\} | \alpha \rangle = \hbar\omega \left\{ |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right\}$$

ahora

$$\langle H^2 \rangle_\alpha = \hbar^2\omega^2 \langle \alpha | \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right]^2 | \alpha \rangle \quad \text{usando} \quad [a, a^\dagger] = 1$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left[|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + 1/4 \right]$$

$$\Delta H_\alpha = \hbar\omega |\alpha|$$

If we compare (48) and (51), we see that, if $|\alpha|$ is very large, we have:

$$\frac{\Delta H_\alpha}{\langle H \rangle_\alpha} \simeq \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \tag{52}$$

The energy of the state $|\alpha\rangle$ is very well-defined, since its relative uncertainty is very small.

Comment:

Since:

$$H = \left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{53}$$

we immediately obtain from (48) and (51):

$$\begin{cases} \langle N \rangle_\alpha = |\alpha|^2 \\ \Delta N_\alpha = |\alpha| \end{cases} \tag{54}$$

Thus we see that, to obtain a quasi-classical state, we must linearly superpose a very large number of states $|\varphi_n\rangle$ since $\Delta N_\alpha \gg 1$. However, the relative value of the dispersion over N is very small:

$$\frac{\Delta N_\alpha}{\langle N \rangle_\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \tag{55}$$

2-c. Calculation of $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$, ΔX and ΔP in an $|\alpha\rangle$ state

The mean values $\langle X \rangle$ and $\langle P \rangle$ can be obtained by expressing X and P in terms of a and $a^\dagger$ [formula (13)] and using (33) and (46). We obtain:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\alpha &= \langle \alpha | X | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}(\alpha) \\ \langle P \rangle_\alpha &= \langle \alpha | P | \alpha \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}(\alpha) \end{aligned} \tag{56}$$

An analogous calculation yields:

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle_\alpha &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1\right] \\ \langle P^2 \rangle_\alpha &= \frac{m\hbar\omega}{2}\left[1 - (\alpha - \alpha^*)^2\right] \end{aligned} \tag{57}$$

and therefore:

$$\begin{aligned} \Delta X_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ \Delta P_\alpha &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \end{aligned} \tag{58}$$

Neither ΔX_α nor ΔP_α, depends on α. Note also that $\Delta X \cdot \Delta P$ takes on its minimum value:

$$\Delta X_\alpha \cdot \Delta P_\alpha = \hbar/2 \tag{59}$$